



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa



Laboratório de Estatística

CADERNO DE EXERCÍCIOS

1. Conceitos fundamentais

- 1.1 Distinga os objetivos da Estatística Descritiva dos relativos à Estatística Indutiva.
- 1.2 Qual a importância dos estudos por amostragem relativamente aos estudos por recenseamento? Ilustre os conceitos subjacentes à sua resposta.
- 1.3 Distinga os conceitos de 'estatística' e de 'parâmetro'.
- 1.4 Distinga dados seccionais de dados cronológicos e de painel, exemplificando.
- 1.5 Como se classificam as variáveis em função da escala subjacente? Exemplifique.
- 1.6 Como se classificam as variáveis relativamente ao número de valores que podem assumir? Exemplifique.
- 1.7 Dê exemplo de potenciais populações, variáveis e unidades estatísticas de interesse nas áreas da Economia e da Gestão.
- 1.8 Distinga os conceitos de variável aleatória e variável empírica.
- 1.9 Qual o procedimento subjacente ao trabalho empírico nas áreas da Economia e da Gestão?
- 1.10 Dê exemplos de bases de dados disponíveis para a realização de trabalho empírico nas áreas da Economia e da Gestão.

2. Análise exploratória de dados

- 2.1 Para efeitos de controle de qualidade um produto é vendido em caixas de 6 unidades, das quais se selecionam aleatoriamente e sem reposição 40 destas caixas, observando-se o número de produtos defeituosos incluídos em cada caixa. A amostra observada consta do quadro que se segue:

2, 0, 1, 3, 0, 3, 6, 4, 5, 3, 0, 1, 0, 3, 2, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 6, 0, 2, 5, 1, 0, 3, 0, 2, 3, 0.
--

- a) Defina a unidade estatística e a variável em análise, classificando-a.
- b) Apresente o quadro de frequências.
- c) Represente graficamente estes dados.
- d) Qual o domínio de variação e o intervalo inter-quartis?
- e) Como avalia a simetria ou assimetria desta distribuição?

2.2 Na seguinte tabela apresenta-se o tempo de estudo semanal fora das aulas (em horas) observado numa amostra de estudantes de MAEG:

6.7	8.2	8.5	5.7	9	8	18.2	9.5	5.6	11.2	9.8	3.1	7.6	8.8	6.3
-----	-----	-----	-----	---	---	------	-----	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----

- Defina a unidade estatística e variável em estudo.
- Calcule os cinco números sumários para este conjunto de dados.
- Analise a simetria dos dados a partir de um diagrama caixa de bigodes

2.3 A informação estatística relativa aos salários mensais auferidos por 100 trabalhadores de uma empresa têxtil consta do quadro que se segue:

Salário (euros)	Trabalhadores (%)
[600 ; 900]	9
]900 ; 1000]	18
]1000 ; 1100]	35
]1100 ; 1200]	22
]1200 ; 1300]	16

- Defina a variável em estudo e classifique-a.
- Represente graficamente os dados.
- Avalie a simetria dos dados a partir da representação gráfica realizada.

2.4 Considere as notas de 50 alunos desta uc obtidas no ano letivo anterior:

93, 77, 67, 72, 52, 83, 66, 84, 59, 63,
 75, 97, 84, 73, 81, 42, 61, 51, 91, 87,
 34, 54, 71, 47, 79, 70, 65, 57, 90, 83,
 58, 69, 82, 76, 71, 60, 38, 81, 74, 69,
 68, 76, 85, 58, 45, 73, 75, 42, 93, 65.

- Represente os dados num diagrama de caule e folhas ordenado.
- Calcule os cinco números sumário a partir do diagrama anterior.
- Construa uma caixa de bigodes e analise a simetria ou assimetria dos dados.
- Agrupe os dados em 5 classes de amplitude constante, com o limite inferior da primeira classe igual a 25 e construa um histograma.

2.5 As notas de Laboratório de Estatística (LE) e de Álgebra Linear (AL) obtidas por 10 alunos constam do quadro que se segue:

LE	15	12	18	14	13	10	15	16	17	17
AL	14	15	17	13	15	10	14	15	18	17

- Represente estes dados graficamente.
- Analise a possibilidade de existência de relação linear entre as notas destas duas uc's.

2.6 A informação estatística relativa à altura dos alunos de uma escola consta do quadro que se segue:

Altura (cm)	Nº de alunos
[150 ; 158]	5
]158 ; 166]	18
]166 ; 174]	42
]174 ; 182]	27
]182 ; 190]	8

- Identifique a unidade estatística e a variável implícitas no enunciado. Classifique a referida variável.
- Analise brevemente os dados a partir da sua representação gráfica.

3. Redução e Sintetização de Dados

3.1 Os salários (em u.m.) de 40 trabalhadores fabris constam do quadro que se segue:

50	55	85	62
35	70	75	68
90	38	72	70
45	120	50	75
80	50	48	83
38	35	45	92
42	125	150	85
110	115	70	140
100	95	75	145
60	90	155	90

- Agrupe os dados em 4 classes de amplitude constante com o limite inferior da primeira classe igual a 35 u.m. e obtenha o quadro de frequências.
- Represente graficamente os dados.

- c) Apresente a função cumulativa de frequências para os limites das classes e represente o correspondente polígono integral.
- d) Calcule as medidas de tendência central para estes dados.

3.2 Considere a informação constante do enunciado relativo ao exercício 2.3.

- a) Analise a simetria ou assimetria da distribuição a partir da construção da caixa de bigodes.
- b) Determine o salário médio resultante de um aumento generalizado de 10% dos salários.
- c) Avalie a concentração dos dados.

3.3 Um clube desportivo efetuou um controle de peso dos seus 40 atletas. O peso médio observado foi de 66,5 kg, a mediana do peso foi de 64 kg e o 1º e 3º quartis foram, respetivamente, 62 kg e 70 kg. Os valores “extremos” observados do peso (em kg) são os seguintes: 40, 51, 53, 53 (na aba esquerda) e 80, 85, 95, e 101 (na aba direita).

- a) Explícite o significado do 1º e 3º quartis no contexto do enunciado.
- b) Do conjunto dos valores extremos identifique e classifique os *outliers*.
- c) Qual a medida de tendência central que considera mais adequada utilizar? Justifique.

3.4 A informação relativa aos salários dos trabalhadores de uma multinacional consta do quadro que se segue:

Classes	0 - 3	3 - 6	6 - 9	9 - 12
Número de trabalhadores	500	1500	2500	500

- a) Calcule o salário médio e o salário mediano.
- b) Qual a percentagem de trabalhadores que auferem um salário superior à média?
- c) Determine o salário médio dos 30% de trabalhadores com menores salários.
- d) Determine o rendimento médio dos 30% de trabalhadores com maiores salários.

3.5 A informação estatística relativa às notas obtidas por um conjunto de alunos universitários nas disciplinas de Estatística e Economia constam do quadro que se segue:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Estatística	10	15	13	16	15	12	11	14	10	11
Economia	12	13	13	15	16	13	12	18	12	15

- a) Avalie individualmente a variabilidade de notas de cada uma das disciplinas.
- b) Avalie agora comparativamente a variabilidade das notas destas disciplinas.

3.6 Considere os dados relativos ao consumo de gasóleo (litros) de 10 automóveis das marcas A e B, num determinado percurso de 100 km:

Marca A: 7,8; 7,0; 8,2; 7,6; 6,9; 7,7; 7,2; 7,8; 7,3; 7,5

Marca B: 7,0; 7,1; 7,1; 7,3; 7,2; 7,0; 7,8; 8,0; 7,0; 7,0

- a) Avalie comparativamente o consumo médio através de uma medida de tendência central que considere adequada para o efeito.
- b) A partir do diagrama de caule e folhas duplo analise a simetria dos dados e interprete no contexto do enunciado.
- c) Recorrendo à função cumulativa de frequências, calcule a proporção de carros da amostra da marca A cujo consumo é superior a 7.3 litros. Identifique a frequência calculada.

3.7 Mostre que a média dos quadrados dos desvios dos valores de uma variável em relação a uma constante c é mínima quando esta constante é a média da variável.

4. Associação e Relação entre Variáveis

4.1 Os gastos em publicidade e as vendas de uma determinada empresa (em u.m.) constam do quadro que se segue:

Ano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vendas	120	150	160	200	210	250	300	360	450	550
Gastos	10	12	14	20	22	25	30	38	50	60

- a) Analise a relação entre as vendas e os gastos em publicidade através de uma representação gráfica que considere adequada.
- b) Estime a reta de regressão dos gastos em publicidade em função das vendas. Interprete o resultado obtido.
- c) Avalie a qualidade do modelo estimado a partir do cálculo de uma medida adequada para o efeito.

4.2 Considere os dados que se seguem relativos aos gastos (em u. m.) realizados por um indivíduo em alimentação (A) e lazer (L) durante 10 dias de férias:

A	20	22	18	10	15	12	20	18	21	11
L	15	17	20	15	14	10	18	20	15	15

- a) Calcule a média e a variância de cada uma das variáveis.
- b) Avalie a existência de uma possível relação linear entre as variáveis em análise a partir de uma medida adequada para o efeito. Justifique.

4.3 Considere a seguinte tabela relativa à situação perante o emprego, por género numa determinada região:

	Empregados	Desempregados
Mulheres	100	55
Homens	120	35

- a) Avalie a existência de associação entre o género e a situação perante o emprego, a partir do cálculo de uma medida adequada.
- b) Identifique, em termos estatísticos, as frequências dadas pelas expressões que se seguem:

b1) 100 / 155

b2) 35 / 310

b3) 155 / 310

4.4 A tabela que se segue apresenta os resultados eleitorais numa determinada freguesia:

Partido	A	B	C
Indivíduos empregados	393	232	152
Indivíduos desempregados	55	28	20

A partir do cálculo de duas medidas que considere adequadas, avalie a existência de associação entre a situação perante o emprego e o partido votado. Justifique.

4.5 O quadro que se segue apresenta informação relativa ao *Índice de humidade* - H - e à *Temperatura máxima do ar* - T - observados nos dez primeiros dias de um determinado mês.

H	5,0	1,6	2,0	3,5	4,7	3,1	2,4	4,1	1,2	2,9
T	23,5	16,1	16,1	20,6	22,8	20,3	18,7	22,5	14,4	19,4

- Analise a associação entre as variáveis a partir de uma representação gráfica que considere adequada.
- Estime, através do método dos mínimos quadrados, a equação de regressão linear que lhe permite explicar a *Temperatura máxima do ar* a partir do *Índice de humidade*.
- Avalie a qualidade do modelo estimado e calcule o valor previsto para a *Temperatura máxima do ar*, num dia em que o *Índice de humidade* é 3.3.

4.6 Mostre que a covariância também pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

5. Números Índice

5.1 Os preços (em u.m.) e quantidades (em kg) consumidos de duas matérias-primas, A e B, numa dada unidade fabril, estão registados no quadro que se segue:

Ano	1	2	3	4	5
P_A	3	4	4,5	4	5,25
Q_A	12	14	8	6	10
P_B	5	6	6,5	5,5	3,9
Q_B	9	11	8	10	12

- Analise a evolução dos preços da matéria-prima A a partir do cálculo de números índice.
- Determine para o ano de 2, com base no ano 1, o índice de quantidades de Laspeyres e comente o valor obtido.

5.2 Os dados que se seguem dizem respeito à evolução dos preços e das quantidades vendidas de três produtos.

	Ano 1		Ano 2		Ano 3	
	<i>Preço</i>	<i>Quantidade</i>	<i>Preço</i>	<i>Quantidade</i>	<i>Preço</i>	<i>Quantidade</i>
Produto 1	10	100	12	100	14	110
Produto 2	12	150	16	120	15	120
Produto 3	8	30	10	35	10	45

- a) Avalie a evolução das quantidades vendidas através do Índice de Quantidades de Paasche, com base no ano 1.
- b) Considere que o índice IP traduz a evolução de preços destes produtos, com valores dados por:

	<i>Ano 1</i>	<i>Ano 2</i>	<i>Ano 3</i>
IP	100	110	115

Para os dois anos seguintes também são conhecidos os valores deste índice, calculados com base no ano 3:

	<i>Ano 4</i>	<i>Ano 5</i>
IP	120	135

A partir dos dados fornecidos, calcule e interprete os valores do índice conciliado, tomando como período base o ano 3.

5.3 Considere os dados que se seguem subjacentes à determinação do IPC de um dado país:

Ano	1		2	3	4
Produtos	Preço	Quantidades	Preço	Preço	Preço
I	100	120	120	150	200
II	190	120	180	170	170
III	30	220	40	45	50
IV	80	150	100	90	110

Os valores relativos à despesa pública com habitação (em u.m. correntes) são:

Ano	1	2	3	4
Despesa	74000	83600	84300	96200

- a) Calcule o Índice de preços de Laspeyres com base no ano 1.
- b) Determine a evolução da despesa pública em habitação a preços constantes do ano 1.

5.4 O quadro que se reproduz abaixo contém informação relativa aos preços e quantidades dos produtos A e B transacionados nos anos de 1 e 2.

Ano	Produto A		Produto B	
	Preço	Quantidade	Preço	Quantidade
1	x	10	12	5
2	7	y	15	10

- Em relação ao produto B, compare a evolução do preço com a evolução da quantidade transacionada, a partir do cálculo de números índices.
- A partir da informação recolhida calculou-se o Índice de Preços de Laspeyres relativo ao ano de 1 com base no ano 2 e obteve-se o valor de 1.2. O Índice de Quantidades de Paasche relativo ao ano 2 com base no ano 1 foi de 1.3. Nestas condições determine x e y .

5.5 Considere os dados que se seguem, relativos ao número de encomendas recebidas por uma empresa via Internet, nos últimos 10 anos.

Ano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Encomendas	25	35	50	70	99	145	230	340	500	800

A partir de números índice, avalie a evolução da variável em estudo, relativamente ao ano de 1.

6. Sucessões Cronológicas

6.1 Considere os dados do exercício 5.5.

- Analise a evolução da variável em estudo a partir de uma representação gráfica adequada.
- Determine os valores da tendência considerando médias móveis de período 3.

6.2 Os valores relativos ao número de assaltos à mão armada (NAMA) numa determinada região na última década, constam do quadro que se reproduz de seguida:

Ano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NAMA	3	1	2	3	4	7	12	8	9	10

- Realize uma primeira análise dos dados a partir do cronograma.
- Estime, através do método dos mínimos quadrados, o valor da tendência previsto para o ano 12, considerando que a mesma é linear.

6.3 O valor das exportações (em u.m.) trimestrais de um determinado produto para os anos de 1 e 2 consta do quadro que se segue:

Ano / Trimestre	1º trim.	2º trim.	3º trim.	4º trim.
1	22	25	24	33
2	37	43	42	52

- Elabore o cronograma das exportações e com base neste analise a tendência da série.
- Avalie a existência de sazonalidade de tipo aditivo através do método das médias trimestrais.

6.4 O número de crianças observadas na consulta de oftalmologia de um determinado centro de saúde teve a seguinte evolução ao longo dos dois últimos anos:

Trimestre	1	2	3	4
Ano 1	110	125	133	128
Ano 2	130	140	145	120

- Analise graficamente a evolução do número de crianças observadas na consulta de oftalmologia.
- Calcule os valores da tendência utilizando médias móveis de período 3.

6.5 O número de telemóveis vendidos numa cadeia de lojas consta do quadro que se segue:

Trimestre	1	2	3	4
Ano 1	500	440	580	600
Ano 2	450	400	500	550

- Analise graficamente a evolução do número de telemóveis vendidos.
- Comprove a existência de sazonalidade através de um método que considere adequado para o efeito e proceda à sua eliminação (considerando sazonalidade de tipo aditivo).
- Identifique a que componentes da série estão associadas as seguintes ocorrências, justificando sumariamente: **c₁) o acordo de estabilização do défice orçamental acordado com a UE; c₂) a época natalícia.**

Respostas Abreviadas

Capítulo 2

2.1 a) Unidade Estatística: caixa de 6 unidades ; Variável: nº de produtos defeituosos por caixa ; **b)** x_i : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; n_i : 14, 7, 5, 8, 1, 3, 2 ; f_i : 0.35, 0.175, 0.125, 0.2, 0.025, 0.075, 0.05 ; **d)** $D = [0, 6]$; $IQ = [0, 3]$; **e)** Assimetria positiva (enviesamento à esquerda).

2.2 a) Unidade Estatística: aluno de MAEG ; Variável: horas de estudo semanal fora das aulas ; **b)** (3.1, 6.3, 8.2, 9.5, 18.2) ; **c)** Assimetria positiva.

2.3 a) Variável contínua: salário, em euros ; **b)** I_j : [600,900] ,]900,1000] ,]1000,1100] ,]1100,1200] ,]1200,1300] ; f_j/h_j : 0.0003, 0.0018, 0.0035, 0.0022, 0.0016 ; **c)** Assimetria negativa.

2.4 a)

		n_i
3	4 8	2
4	2 2 5 7	4
5	1 2 4 7 8 8 9	7
6	0 1 3 5 5 6 7 8 9 9	10
7	0 1 1 2 3 3 4 5 5 6 6 7 9	13
8	1 1 2 3 3 4 4 5 7	9
9	0 1 3 3 7	5

b) (34, 58.75, 71, 81.25, 97) ; **c)** Ligeira assimetria negativa ; **d)** I_j : [25,40] ,]40,55] ,]55,70] ,]70,85] ,]85,100] ; f_j/h : 0.1333, 0.4667, 1, 1.3333, 0.4.

2.5 b) Associação linear positiva relativamente forte.

2.6 a) Unidade Estatística: aluno ; Variável contínua: altura, em cm ; **b)** I_j : [150,158] ,]158,166] ,]166,174] ,]174,182] ,]182,190] ; F_j/h : 0.625, 2.25, 5.25, 3.375, 1 ; Assimetria negativa.

Capítulo 3

3.1 a) I_j : [35,65] ,]65,95] ,]95,125] ,]125,155] ; x'_j : 50, 80, 110, 140 ; n_j : 14, 17, 5, 4 ; f_j : 0.35, 0.425, 0.125, 0.1 ; N_j : 14, 31, 36, 40 ; F_j^* : 0.35, 0.775, 0.9, 1 ; **b)** f_j/h : 0.4667, 0.5667, 0.1667, 0.1333 ; **c)** $F^*(35) = 0$, $F^*(65) = 0.35$, $F^*(95) = 0.775$, $F^*(125) = 0.9$, $F^*(155) = 1$; **d)** $\bar{x} = 79.25$; $m_e = 75.588$; $m_o = 71$ ou $m_o = 72.895$ (fórmula de Kling).

3.2 a) (600,988.889,1065.714,1159.091,1300) ; Assimetria negativa ; **b)** 1164.9 ; **c)** $G = 0.081$.

3.3 a) $Q_1 = 62$; $Q_3 = 70$; **b)** *Outliers* moderados: 40, 85 ; *Outliers* graves: 95, 101 ; **c)** Mediana ou Moda.

3.4 a) $\bar{x} = 6.3$; $m_e = 6.6$; **b)** 55% ; **c)** $\bar{x}_1 = 3.167$; **d)** $\bar{x}_2 = 9.1$.

3.5 a) $s_{EST}^2 = 4.41$; $s_{ECO}^2 = 3.69$; **b)** $CV_{EST} = 16.535$; $CV_{ECO} = 13.820$.

3.6 a) $\bar{x}_A = 7.5$; $\bar{x}_B = 7.25$;

b)

Folhas – A		Folhas – B
9	6*	
0 2 3	7	0 0 0 0 1 1 2 3
5 6 7 8 8	7*	8
2	8	0

c) $F^*(6.9) = 0$, $F^*(7.3) = 0.4$, $F^*(7.8) = 0.9$, $F^*(8.2) = 1$; 0.6.

Capítulo 4

4.1 a) Relação linear positiva bastante forte ; b) $y = \text{gastos}$, $x = \text{vendas}$: $\hat{y} = -4.46 + 0.1184 x$; c) $R^2 = 0.99674$.

4.2 a) $\bar{x}_A = 16.7$; $s_A^2 = 17.41$; $\bar{x}_L = 15.9$; $s_L^2 = 8.09$; b) $r_{AL} = -0.8957$.

4.3 a) $\chi^2 = 6.263$; $V = 0.142$: associação fraca.

4.4. $\chi^2 = 0.3631$; $T = 0.017$; $V = 0.02$: associação muito fraca.

4.5 a) Relação linear positiva bastante forte ; b) $\hat{T} = 12.19625 + 2.375 H$; c) $R^2 = 0.96105$; 20.03375.

Capítulo 5

5.1 a) 100, 133.333, 150, 133.333, 175 ; b) 119.753.

5.2 a) 100, 88.974, 95.949 ; b) 86.9565, 95.6522, 100, 120, 150.

5.3 a) 100, 111.985, 115.730, 134.644 ; b) 74000, 74652.855, 72841.960, 71447.669.

5.4 a) Índices preço: 100, 125 ; Índices quantidade: 100, 200 ; b) $x = 19.309$, $y = 5.5$.

5.5. 100, 140, 200, 280, 396, 580, 920, 1360, 2000, 3200.

Capítulo 6

6.1 a) tendência exponencial ; b) 36.667, 51.667, 73, 104.667, 158, 238.333, 356.667, 546.667.

6.2 a) tendência aproximadamente linear ; b) 12.953 (cerca de 13).

6.3 a) tendência linear ; b) -5.25 , -0.75 , -1.75 , 7.75 .

6.4 a) tendência aproximadamente linear ; b) 122.667, 128.667, 130.333, 132.667, 138.333, 135.

6.5 a) possível sazonalidade ; b) Índices sazonais: -27.5 , -82.5 , 37.5 , 72.5 ; Sucessão sem sazonalidade: 527.5, 522.5, 542.5, 527.5, 477.5, 482.5, 462.5, 427.5 ; c) c₁) componente oscilatória ; c₂) componente sazonal.